http://maurimath.net/Espaceeleves.php

LBMAM OULD IDOUMOUN

Correction d'exercice 06

Soit $f(x) = \dfrac{|x+1|-1}{x+3}$

1/ $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... -1	-1 ... $+\infty$
$x+1$	$-$	$-$ $\quad 0$	$+$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$
$f(x)$	$\dfrac{-x-2}{x+3}$	$\dfrac{-x-2}{x+3}$	$\dfrac{x}{x+3}$

2/ Étude la continuité de f en $x_0 = -1$

$\times$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{-1^-} \dfrac{-x-2}{x+3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

$\times$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{-1^+} \dfrac{x}{x+3} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, alors f est continue en $x_0 = -1$

** Étude la dérivabilité de f en $x = -1$

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... -1	-1 ... $+\infty$
$f(x)$	$\dfrac{-x-2}{x+3}$	$\dfrac{-x-2}{x+3}$	$\dfrac{x}{x+3}$
$f'(x)$	$\dfrac{-1}{(x+3)^2}$	$\dfrac{-1}{(x+3)^2}$	$\dfrac{3}{(x+3)^2}$

$\left(\dfrac{-x-2}{x+3}\right)' = \dfrac{-1(x+3)-1(-x-2)}{(x+3)^2}$

$\Rightarrow \dfrac{-\cancel{x}-3+\cancel{x}+2}{(x+3)^2} = \boxed{\dfrac{-1}{(x+3)^2}}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x}{x+3}\right)' = \dfrac{1(x+3)-1(x)}{(x+3)^2} \Rightarrow$

$\dfrac{\cancel{x}+3-\cancel{x}}{(x+3)^2} = \boxed{\dfrac{3}{(x+3)^2}}$

$f'_g(-1) = -\dfrac{1}{4}$ et $f'_d(-1) = \dfrac{3}{4}$

$f'_d(-1) \neq f'_g(-1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0 = -1$

3/ T.V de f

$\times$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\} =]-\infty ; -3[\cup]-3, +\infty[$

** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} -\dfrac{x-2}{x+3} = -\dfrac{x}{x} = \boxed{-1}$

** $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = \boxed{-\infty}$

** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{x+3} = \lim \dfrac{x}{x} = \boxed{1}$

x	$-\infty$ ... -3	-3 ... -1	-1 ... $+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{1}{2} \nearrow 1$

4/ Les demi-tangente à gauche de -1

$T: \ y = f'_g(-1)(x+1) + f(-1)$

$\boxed{y = -\frac{1}{4}(x+1) - \frac{1}{2}}$

· Les demi-tangente à droite de -1

$T: \ y = f'_d(-1)(x+1) + f(-1)$

$\boxed{y = \frac{3}{4}(x+1) - \frac{1}{2}}$

5/ Déterminons les asymptotes.

$y = -1$ AH au voisinage de $-\infty$

$x = -3$ AV

$y = 1$ AH au voisinage de $+\infty$

Trace de $\mathcal{C}$

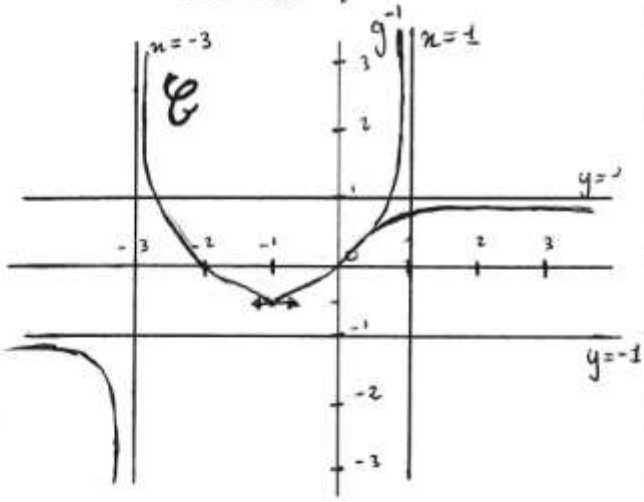
$\mathcal{C} \cap ox \quad f(x) = 0$

$\frac{|x+1|-1}{x+3} = 0 \Rightarrow |x+1| - 1 = 0$

$|x+1| = 1 \quad$ ou $\quad |x+1| = -1$

$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{x = -2}$

$\mathcal{C} \cap oy : f(0) = 0$



6/ a) Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$ $g(x) = f(x)$ est croissante est continue alors elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ vers $J = [0,1[$

b) Soit h la reciproque de g

$h = g^{-1}$

Construction h

· on construit la droite $y = x$

Pour $g=f$	Pour $h=g^{-1}$
$(0,0)$ $y=-1$ AH	$(0,0)$ $x=1$ AV

* Calcul de $g(1)$

$g(1) = f(1) = \frac{1}{4}$

* Calcul de $h(\frac{1}{4}) = g^{-1}(\frac{1}{4})$

$\boxed{g(a) = b \iff g^{-1}(b) = a}$

$g(1) = \frac{1}{4} \iff g^{-1}(\frac{1}{4}) = 1$ or $\boxed{h(\frac{1}{4}) = 1}$

* Calcul de $h'(\frac{1}{4}) = (g^{-1})'(\frac{1}{4})$

$\boxed{(g^{-1})'(x_0) = \frac{1}{g'[g^{-1}(x_0)]}}$

$(g^{-1})'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{g'[1]} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{3}{16}} = \boxed{\frac{16}{3}}$

c/ Pour trouver l'expression de la reciproque $h = g^{-1}$, on pose $y = g(x)$ et on ecrit x en fonction de y :

$$y = g(x) \iff y = \frac{x}{x+3}$$

$$y(x+3) = x \Rightarrow yx + 3y = x \Rightarrow yx - x = -3y$$

$$\Rightarrow (y-1)x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3y}{y-1} \quad \text{Donc } g^{-1}(x) = -\frac{3x}{x-1}$$

Soit $\boxed{h(x) = -\frac{3x}{x-1}}$

$$h'(x) = \frac{-3(x-1) - (-3x)}{(x-1)^2} \Rightarrow h'(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2} \Rightarrow \frac{3}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \Rightarrow \frac{3}{\frac{9}{16}} \Rightarrow 3 \cdot \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{16}{3}$$

$\boxed{h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{3}}$ même resultat obtenu en (b/c)